



Mladen Ćosić¹, Mitar Đogo²

O ASPEKTIMA MODELIRANJA TEMELJNOG NOSAČA I TLA ZA FEM ANALIZU

Rezime

U ovom radu su prikazani aspekti modeliranja izdvojenog temeljnog nosača i tla za uticaj statičkog opterećenja. Temeljni nosač je razmatran primenom linijskih, površinskih i prostornih konačnih elemenata, dok je tlo modelirano oprugama sa zamenjujućim konstantama i primenom prostornih konačnih elemenata. Svi tipovi proračunskih modela razmatrani su sa nivoa matematičkog modeliranja i aspekata primenjivosti u praktične svrhe.

Ključne reči

modeliranje konstrukcije i tla, metoda konačnih elemenata, 3D *solid* konačni elementi

ASPECTS OF MODELING FOUNDATION GIRDER AND SOIL FOR FEM ANALYSIS

Summary

This paper presents the fundamental aspects of modeling separate foundation girder and ground for the influence of static load. The foundation girder is considered using the line, surface and spatial finite elements, while the soil is modeled by replacing the spring constants and application of spatial finite elements. All types calculated models are reviewed with the level of mathematical modeling and the practical aspects of applicability purposes.

Key words

modeling of structure and soil, finite element method, 3D solid finite elements

¹ mladen165@inffo.net

² Mentor, Prof. Dr, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, mitar@uns.ac.rs

odnosno:

$$q = L^{-1}(\beta p), \quad (9)$$

pri čemu je:

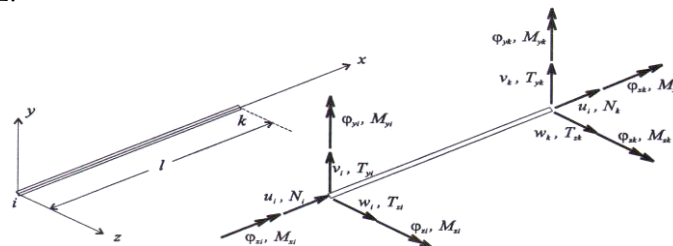
$$\beta = \frac{\pi E_0 C^4}{(1 - \nu_0^2) EI}. \quad (10)$$

Razvojem softvera za numeričku analizu konstrukcija metodom konačnih elemenata MKE (FEM-*finite element method*), otvaraju se mogućnosti za realističnije modeliranje temeljnih nosača, tla i prelaznih uslova. Istraživanje prikazano u ovom radu se zasniva na primeni konačnih elemenata KE u modeliranju i numeričkoj analizi, dok se prethodno opisane procedure izlažu kao komparativne.

2. MODELIRANJE TEMELJNOG NOSAČA LINIJSKIM KE

Metod konačnih elemenata spada u metode diskretne analize. Sam metod se zasniva na fizičkoj diskretizaciji jednačina graničnog problema. Osnova za sva razmatranja predstavlja deo domena konačnih dimenzija, poddomen ili konačni element (KE). Sa aspekta fizičke diskretizacije, razmatrani domen kao kontinuum, zamenjuje se diskretnim modelom međusobno povezanih konačnih elemenata sa konačnim brojem stepeni slobode. Naponsko-deformacijsko stanje u konačnom elementu opisuje se pomoću interpolacionih funkcija i konačnog broja parametara u čvorovima, koje predstavljaju osnovne nepoznate veličine za proračun.

Linijski KE imaju jednu dimenziju (dužina) izraženu u odnosu na dve ostale (širina i visina), pa su i najčešće primenjivani KE za modeliranje grednih nosača. Gredni (*beam*) KE se zasnivaju na primenu *Bernoulli-Euler*-ove hipoteze o ravnim ortogonalnim preseccima, dok se rebro KE (*rib*) zasniva na primeni *Timoshenko*-ove hipoteze da preseccima ostaju ravni, ali ne i upravni na deformabilnu osu temeljnog nosača. Osnovne kinematičke veličine u čvorovima KE nosača su generalisana pomeranja u, v, w u pravcu osa x, y, z i obrtanja $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ oko osa x, y, z (slika 1.) [2]. Broj stepeni slobode u čvoru jednak je broju generalisanih pomeranja u čvoru. Broj stepeni slobode KE jednak je zbiru stepeni slobode u čvorovima KE.



Slika 1. Generalisane sile i generalisana pomeranja u čvorovima linijskog KE

Veza sila-pomeranje za sve KE:

$$R_j^* = k_j^* q_j^* - Q_j^*, \quad (11)$$

matrično glasi:

$$\begin{bmatrix} R_{j,i}^* \\ R_{j,k}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{j,ii}^* & k_{j,ik}^* \\ k_{j,ki}^* & k_{j,kk}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i^* \\ q_k^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_{j,i}^* \\ Q_{j,k}^* \end{bmatrix}, \quad (12)$$

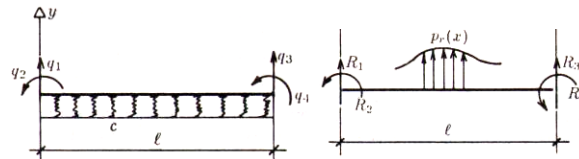
odnosno može da se formuliše kao:

$$K_{ii}^* q_i^* + \sum_{j=1}^m K_{ik}^* q_k^* = P_i^* + Q_i^* . \quad (13)$$

Uvođenjem preko bazne matrice krutosti, matrica krutosti KE temeljnog nosača sa učešćem smičućih efekata glasi:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{(1+\varphi)^3} & \frac{6EI}{(1+\varphi)^2} & 0 & -\frac{12EI}{(1+\varphi)^3} & \frac{6EI}{(1+\varphi)^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\varphi)^2} & \frac{(1+0.25\varphi)4EI}{(1+\varphi)} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\varphi)^2} & \frac{(1-0.5\varphi)2EI}{(1+\varphi)} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{(1+\varphi)^3} & -\frac{6EI}{(1+\varphi)^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+\varphi)^3} & -\frac{6EI}{(1+\varphi)^2} \\ 0 & \frac{6EI}{(1+\varphi)^2} & \frac{(1-0.5\varphi)2EI}{(1+\varphi)} & 0 & -\frac{6EI}{(1+\varphi)^2} & \frac{(1+0.25\varphi)4EI}{(1+\varphi)} \end{bmatrix} . \quad (14)$$

Temeljni nosač se takođe može tretirati kao nosač na elastičnoj podlozi uniformne krutosti, s'tim što se podloga predstavlja pomoću elastičnih opruga koje su ravnomerno raspodeljene duž ose štapa (slika 2.). Opruge predstavljaju linijski elastični oslonac (*Winkler*-ovog tipa) sa reakcijama oslonaca kao unutrašnjim silama, kod kojih je krutost po jedinici dužine c (kN/m').



Slika 2. KE temeljnog nosača na elastičnoj podlozi

Uticaj elastičnih opruga na KE može da se zameni reaktivnim transverzalnim opterećenjem koje je proporcionalno poprečnim pomeranjima $v(x)$:

$$p_r(x) = cv(x) . \quad (15)$$

Kontinualnom raspodjeljenom opterećenju duž ose KE nosača ekvivalentno je koncentrisano opterećenje na krajevima KE:

$$R = \int_0^l N^T p_r dx = cq \int_0^l N^T N_r dx = Cq , \quad (16)$$

pri čemu je matrica krutosti elastične podloge:

$$C = c \int_0^l N^T N_r dx . \quad (17)$$

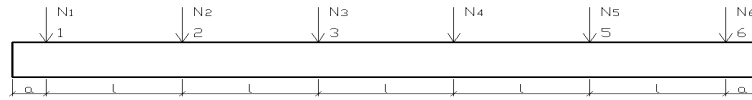
Integracijom po interpolacionim polinomima dobija se:

$$C = \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} . \quad (18)$$

Matrica krutosti KE temeljnog nosača koji je oslonjen na elastičnu podlogu jednaka je zbiru konvencionalne matrice krutosti KE temeljnog nosača i matrice krutosti podloge:

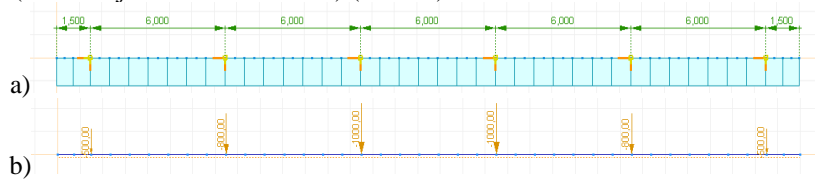
$$k_c = (k + C) . \quad (19)$$

Kao reprezentativni primer razmatran je temeljni nosač opterećen vertikalnim koncentrisanim silama (slika 3.).



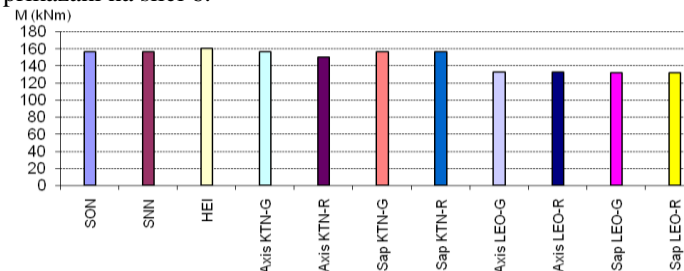
Slika 3. Temeljni nosač opterećen vertikalnim koncentrisanim silama

Prvi proračunski slučaj je kada se temeljni nosač razmatra kao kontinualni nosač (KTN-kontinualni temeljni nosač), dok se u drugom slučaju temeljni nosač razmatra na elastičnoj podlozi (LEO-linijski elastični oslonci) (slika 4.).

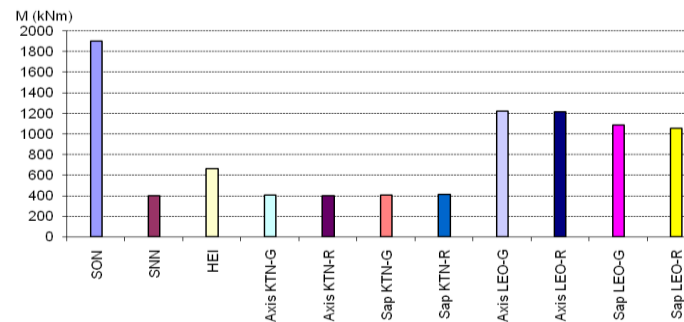


Slika 4. Proračunski slučajevi: a) kontinualni temeljni nosač, b) nosač na elastičnoj podlozi

Numeričke analize sprovedene su primenom softvera AxisVM i Sap2000. Vrednosti momenata savijanja M_1 za proračunske modele prikazani su na slici 5., dok su momenti savijanja M_3 prikazani na slici 6.



Slika 5. Momenat savijanja M_1 (G-gredni KE, R-rebro KE)



Slika 6. Momenat savijanja M_3 (G-gredni KE, R-rebro KE)

Evidentna je razlika rezultata dobijenih primenom različitih metoda kojim se vrši modeliranje temeljnog nosača i uzimanje u obzir interakcije tlo-temeljni nosač. Komparacijom vrednosti dobijenih modeliranjem temeljnog nosača kao statički određenog nosača i primenom programa Sap2000 kojim se modelira temeljni nosač kao kontinualni nosač, razlika momenata savijanja M_3 iznosi i do 360%. O ovome treba voditi računa pri uzimanju u obzir metode kojom će se vršiti dimenzionisanje temeljnog nosača. Uticaj

smičućih deformacija u ovom primeru iznosio je do 5%. Za odnose h/L veće od 0.2 uticaj deformacije smicanja u pojedinim elementima matrice krutosti prelazi iznad 10%. Analiziranjem temeljnog nosača kao nosača na elastičnim osloncima dobija se realnija naponsko-deformacijska slika sleganja, za razliku od modela temeljnog nosača kao kontinualnog sistema.

3. MODELIRANJE TEMELJNOG NOSAČA POVRŠINSKIM KE

Modeliranje temeljnog nosača primenom površinskih KE omogućava uvid u realnije naponsko-deformacijsko stanje. Površinski konačni elementi imaju dve dimenzije izražene u odnosu na treću (debljina), tako da je opšti princip da se temeljni nosač modelira primenom površinskih konačnih elemenata ljuska (*shell*). Konačni elementi ljuske su simultano opterećeni: tangencijalno, odnosno membranski (opterećene u sopstvenoj površi) i ortogonalno na savijanje (normalno na sopstvenu površ) [3]. Druga solucija je da se direktno koriste membranski konačni elementi (*membrane*) za vertikalno rebro i konačni elementi za ploču (*plate*). Membranski KE je trougaoni ili četvorougao, izoparametarski, sa osam čvorova, ravan i konstantne debljine. Ploča KE je četvorougao *Heterosis* formulisan u skladu sa *Mindlin-Reissner*-ovom teorijom, izoparametarski, sa osam čvorova, ravan i konstantne debljine.

Stanje napona i deformacija je zavisno od fleksibilnosti tla kao podloge. Numerički postupak za proračun i analizu temeljnog nosača zasniva se na jednakosti pomeranja nosača i tla u izabranom broju tačaka, u kontaktnoj površi. Reaktivno opterećenje u okviru svakog KE predstavlja se pomoću izoparametarskih polinoma, na isti način kao i polje pomeranja [4].

Na osnovu pretpostavke o tlu kao elastičnom, homogenom, izotropnom, poluprostoru, proizilazi da je veza između pomeranja w i reaktivnog opterećenja r data linearnim jednoznačnim funkcijama, tako da važi:

$$w = Fr, \quad (20)$$

gde je F simetrična matrica (matrica fleksibilnosti tla). Veza između pomeranja w i pomeranja u u čvorovima, odnosno veza između reaktivnog opterećenja r u elementu i reaktivnih opterećenja u u čvorovima data je preko:

$$w = \sum_{i=1}^8 N_i w_e, \quad r = \sum_{i=1}^8 N_i r_e, \quad (21)$$

gde je N_i interpolaciona funkcija. Diferenciranjem izraza za potencijalnu energiju sistema i primenom stava o minimumu energije dobija se sistem algebarskih jednačina:

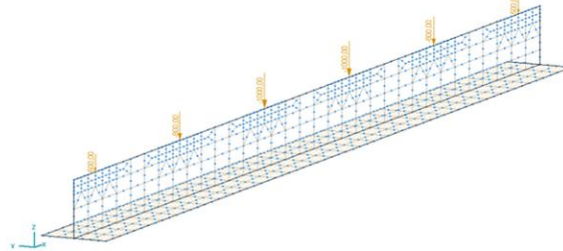
$$\begin{bmatrix} K_{ww} & F+H & K_{w\theta} \\ K_{\theta w} & & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_w \\ Q_\theta \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Kao osnovne nepoznate uzimaju se reaktivna opterećenja r , a ne pomeranja u čvorovima w , tako da nije potrebno izvršiti proračun matrice krutosti. Za formiranje sistema jednačina potrebno je sračunati elemente fleksibilnosti podloge F . Kao polaznu osnovu za to predstavlja *Boussinesque*-ovo rešenje za homogeni, izotropan, elastični poluprostor opterećen koncentrisanom silom:

$$w = \frac{1 - \nu_0}{\pi E_0 \rho} p, \quad (23)$$

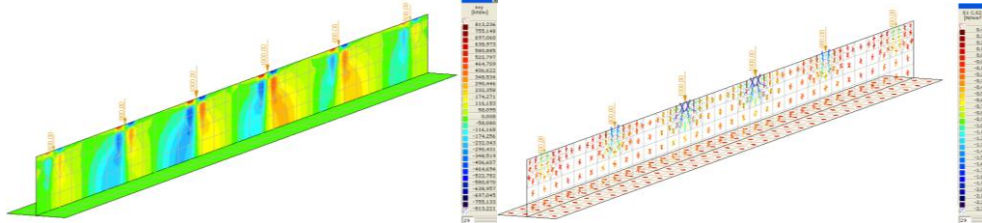
gde je ν_0 *Poisson*-ov koeficijent.

Za sve proračunske modele korišćeni su površinski četvorougaoi KE za formiranje generalne mreže konačnih elemenata, dok je kod modela u AxisVM softveru dodatno izvršeno progušćenje mreže KE u zoni apliciranja koncentrisane sile (slika 7.).



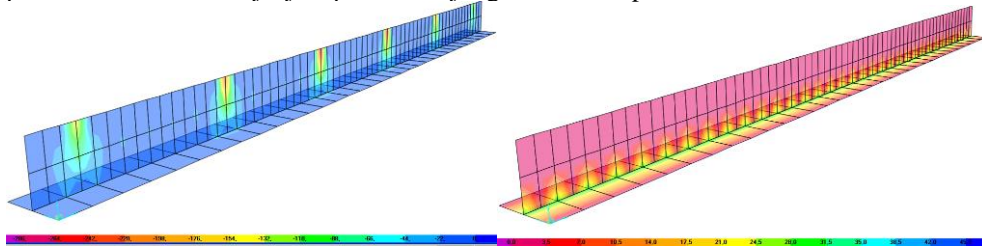
Slika 7. Model temeljnog nosača formiran iz površinskih KE u AxisVM

Na slici 8.a) su prikazani naponi, odnosno sile u rebru temeljnog nosača, dok su na slici 8.b) prikazane trajektorije glavnih napona u AxisVM.



Slika 8. a) membrana n_{xy} (kN/m), b) trajektorije glavnih napona (AxisVM)

Na slici 9.a) su prikazani naponi, odnosno sile u rebru temeljnog nosača, dok su na slici 9.b) prikazani momenti savijanja u ploči temeljnog nosača u Sap2000.



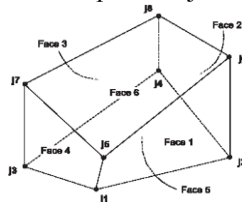
Slika 9. a) membrana n_x (kN/m), b) ploča m_y (kNm/m) (Sap2000)

4. MODELIRANJE TEMELJNOG NOSAČA PROSTORNIM KE

Modeliranje temeljnog nosača primenom prostornih (*solid*) KE omogućava najkvalitetniji prikaz naponsko-deformacijskog stanja temeljnog nosača. *Solid* KE su sa osam čvorova (svaki čvor ima tri translaciona stepena slobode pomeranja), heksaedarski, izoparametarski i koristi se $2 \times 2 \times 2$ numerička integraciona šema (slika 10.) [5]. Osnovne nepoznate u čvorovima su komponente pomeranja u , v i w tako da je ukupan broj stepeni slobode $3 \times 8 = 24$. Promena pomeranja u elementu je linearna kao što su i koordinate, tako da se pomeranja u elementu mogu izraziti istom funkcijom kao i koordinate. U matricnoj formi deformacije se predstavljaju preko:

$$\varepsilon = B d, \quad (24)$$

gde je B matrica izvoda, d matrica čvornih pomeranja.



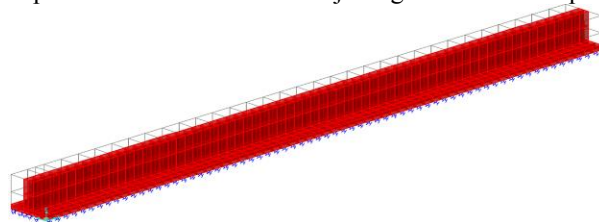
Slika 10. Solid KE sa definisanim čvorovima i stranama

Pošto je matrica B izražena u lokalnim koordinatama, integracija matrice krutosti vrši se u istim koordinatama. Matrica krutosti se dobija prema izrazu:

$$K = \int_v B_e^t D B_e dv, \quad (25)$$

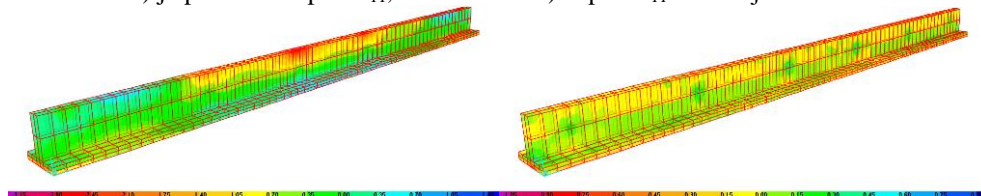
gde je B_e matrica elastičnih konstanti.

Mreža konačnih elemenata temeljnog nosača generiše se poštujući principe maksimalne dimenzije jedne stranice KE i odnosa dimenzija strana KE (slika 11.). Uticaj komponenti krutosti tla uvodi se preko elastičnih oslonaca koji mogu biti čvorni ili površinski.



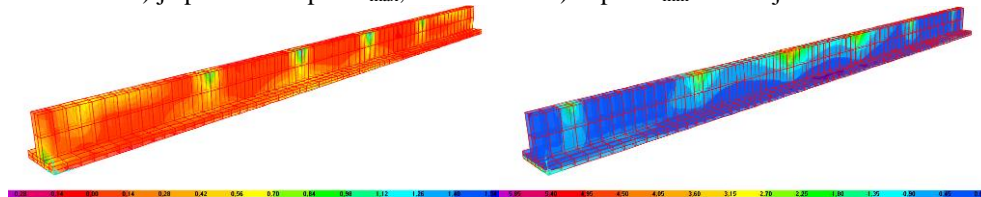
Slika 11. 3D model temeljnog nosača formiran iz solid KE u Sap2000

Na slici 12.a) je prikazan napon S_{11} , a na slici 12.b) napon S_{11} u temeljnom nosaču.



Slika 12. a) napon S_{11} (MPa), b) napon S_{22} (MPa)

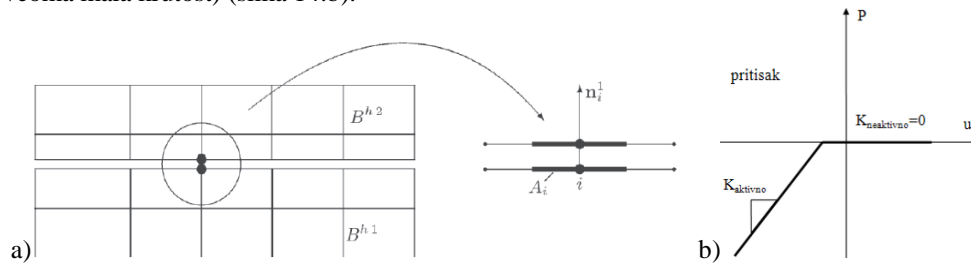
Na slici 13.a) je prikazan napon S_{max} , a na slici 13.b) napon S_{min} u temeljnom nosaču.



Slika 13. a) napon S_{max} (MPa), b) napon S_{min} (MPa)

Poboljšanje prethodnog modela, kod koga se uticaj komponenata krutosti tla uvodi preko elastičnih oslonaca, može se izvršiti modeliranjem tla preko *solid* KE. Kod modela elastičnih oslonaca prema *Winkler*-ovom modelu ponašanja tla, pritisak u svakoj tački kontaktne površi temelja proporcionalan je elastičnom sleganju u toj tački. Sa druge strane kada se tlo modelira kao 3D model *solid* KE, tada se temeljni nosač ponaša kao nosač na

HEIP-u. Usled dejstva spoljašnjih uticaja na kontaktu temeljni nosač-tlo javiće se na određenim mestima pritisak, a na određenim naponi zatezanja na kontaktnoj spojnici. Da bi se opisalo realno ponašanje na nivou kontaktno spojnice potrebno primeniti elemente veze (*link elements*). Pošto se uzimaju u obzir samo naponi pritiska u analizi, primenjuju se kontaktni elementi veze (*gap elements*) [6]. Za uspostavljanje kontinuiteta veze interakcije temeljni nosač-tlo primenjuje se diskretan model kontaktnog elementa, kojim se vrši povezivanje čvorova KE (slika 14.a). Kontaktni element karakterišu dva stanja: aktivno (kontakt je uspostavljen, veoma velika krutost) i neaktivno (kontakt nije uspostavljen, veoma mala krutost) (slika 14.b).



Slika 14. a) čvorni kontaktni element, b) dijagram sila-pomeranje kontaktnog elementa

Primenjujući kontaktne elemente u modeliranju prelazne zone temeljni nosač-tlo, potrebno je i primeniti geometrijski nelinearnu inkrementalno-iterativnu analizu. Usled nelinearnog ponašanja (promenu stanja prati velika promena krutosti) kontaktnog elementa, mogu se javiti ozbiljne teškoće u obezbeđenju konvergencije nelinearnog rešenja. U samoj formulaciji problema smatraće se da pri inkrementalnim situacijama nastupa takva promena geometrije zone kontakta, da inicijalnoj generisanoj mreži konačnih elemenata odgovara konfiguracija mreže konačnih elemenata za bilo koju inkrementalnu situaciju. Ovim se uvode pojednostavljenja u analizi sistema čime se eliminiše upotreba dodatnih algoritama za pretraživanje povoljne konfiguracije u povezivanju čvorova mreže u i-toj inkrementalnoj analizi, ili čak primena adaptivne metode za korekciju mreže konačnih elemenata sistema. Jednačina kontakta se može direktno formulisati za svaki par čvorova (slika 14.a) [7], tako da su geometrijski uslovi kontaktne veze za jedan i-ti par čvorova:

$$g_{Ni} = (u_i^2 - u_i^1) \cdot n_i^1 + g_i \geq 0, \quad (26)$$

gde su u_i^a vektori pomeranja i-tog para čvorova koji odgovaraju domenu B^a , g_i inicijalni razmak između i-tog para čvorova. Pošto je parametar kojim se definiše veličina inicijalnog otvora nezavisan od polja pomeranja, to se varijacijom (26) dobija:

$$\delta g_{Ni} = (\eta_i^2 - \eta_i^1) \cdot n_i^1. \quad (27)$$

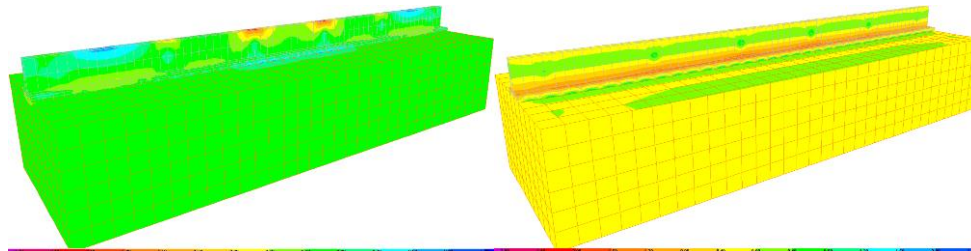
Uzimajući u obzir da u interakciji dva domena učestvuje n_c kontaktnih elemenata potrebno je integralom:

$$\int_{\Gamma_c} \lambda_N \delta g_N d\Gamma \rightarrow \sum_{i=1}^{n_c} \int_{\Gamma_i^h} \lambda_N^h \delta g_N^h d\Gamma, \quad (28)$$

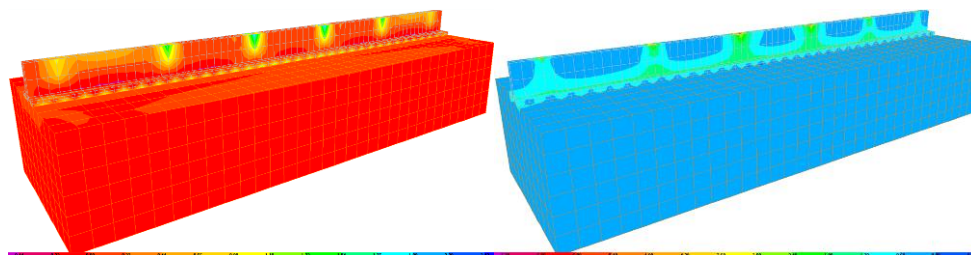
u kome je λ_N polje *Lagrange*-ovih multiplikatora, u^a polja pomeranja oba domena koji se razmatraju u analizi kontakta, g_N funkcija zazora, otvora (*gap function*), obuhvatiti sumu svih aktivnih kontaktnih čvorova. U ovoj analizi se primenjuje penal formulacija (*penalty formulation*), a koja se zasniva na diskretizaciji metode *Lagrange*-ovih multiplikatora (*Lagrange multiplier method*).

Da bi se uspostavila kompatibilnost deformacija na kontaktu temeljni nosač-tlo, potrebno je uzeti u obzir da komponenta krutosti u pravcu veze K_z ima veliku vrednost ($K_z=10^{10}$ kN/m).

Pošto je primenjen kontaktni čvorni element, to je potrebno ispuniti uslov o veličini KE u kontaktnoj zoni, odnosno o dovoljnom broju kontaktnih elemenata kako se takođe ne bi narušila kompatibilnost deformacija. Ukupan broj *solid* KE modela iznosi 3036, dok je broj jednačina ravnoteže sistema 10629. Na slici 15.a) je prikazan napon S_{11} , na slici 15.b) napon S_{22} , na slici 16.a) napon S_{max} , a na slici 16.b) napon S_{min} za 3D model temeljnog nosača i tla.



Slika 15. a) napon S_{11} (MPa), b) napon S_{22} (MPa)



Slika 16. a) napon S_{max} (MPa), b) napon S_{min} (MPa)

5. ZAKLJUČAK

Primenom metode konačnih elemenata, realističnog prostornog modeliranja i savremenih postupaka u modeliranju kontaktnih zona konstrukcija-tlo moguće je sprovesti veoma pouzdane analize. Trodimenzionalni model temeljnog nosača i temeljnog tla predstavlja najrealniji model za analizu sa aspekta interakcije dva diferentna sistema i sagledavanja stvarnih naponsko-deformacijskih stanja u tlu.

LITERATURA

- [1] S. Stevanović: "Fundiranje I", Naučna knjiga, Beograd, 1989.
- [2] M. Sekulović: "Matrična analiza konstrukcija", Građevinska knjiga, Beograd, 1991.
- [3] D. Kovačević: "MKE modeliranje u analizi konstrukcija", Građevinska knjiga, Beograd, 2006.
- [4] A. Poceski: "Mešoviti metod konačnih elemenata", Građevinska knjiga, Beograd, 1990.
- [5] "SAP 2000 Integrated software for structural analysis and design-ANALYSIS REFERENCE MANUAL", CSI, USA, California, Berkeley, 2002.
- [6] M. Ćosić: "Eliminacija napona zatezanja na kontaktu temeljna konstrukcija-tlo", Geotehnički aspekti građevinarstva, III savetovanje, Zlatibor, Srbija, 20-23. oktobar, 2009, str. 129-136.
- [7] P. Wriggers: "Computational Contact Mechanics", Springer-Verlag, New York, 2006.